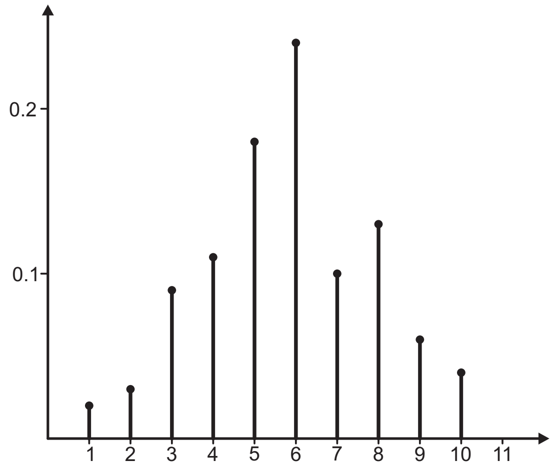
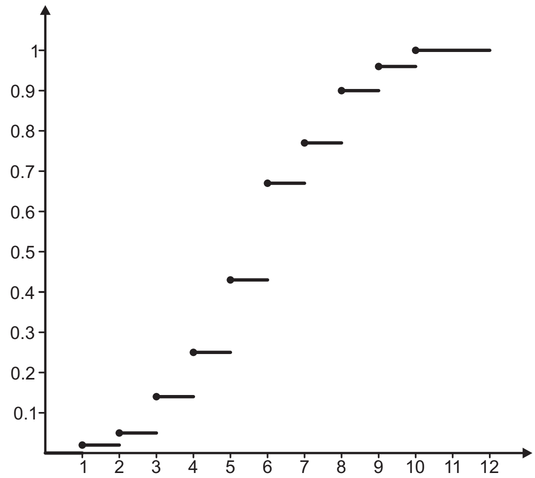
15.1

i	a_i	n_i	h_i	G_i	F_i
1	1	2	0,02	2	0,02
2	2	3	0,03	5	0,05
3	3	9	0,09	14	0,14
4	4	11	0,11	25	0,25
5	5	18	0,18	43	0,43
6	6	24	0,24	67	0,67
7	7	10	0,10	77	0,77
8	8	13	0,13	90	0,90
9	9	6	0,06	96	0,96
10	10	4	0,04	100	1,00

a)



b)



c) Bei $x = 6$ Sprung von 0,43 (<0,5) auf 0,67 (>0,5) $\Rightarrow \tilde{x} = 6$

d)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} h_i a_i = 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}09 \cdot 3 + 0{,}11 \cdot 4 + 0{,}18 \cdot 5$$
$$+ 0{,}24 \cdot 6 + 0{,}10 \cdot 7 + 0{,}13 \cdot 8 + 0{,}06 \cdot 9 + 0{,}04 \cdot 10 = 5{,}81$$

e) $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{m} h_i(a_i-\bar{x})^2$$

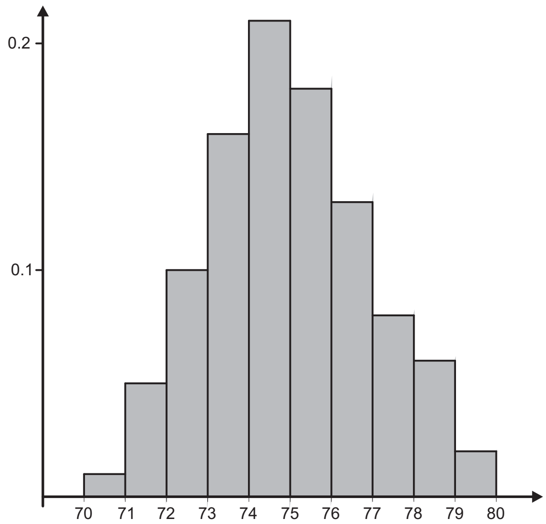
$$\tilde{s}^2 = 0{,}02(1-5{,}81)^2 + 0{,}03(2-5{,}81)^2 + 0{,}09(3-5{,}81)^2 + 0{,}11(4-5{,}81)^2 + 0{,}18(5-5{,}81)^2$$
$$+\ 0{,}24(6-5{,}81)^2 + 0{,}10(7-5{,}81)^2 + 0{,}13(8-5{,}81)^2 + 0{,}06(9-5{,}81)^2 + 0{,}04(10-5{,}81)^2$$
$$= 4{,}1739$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{s}^2 = \frac{100}{99}\,4{,}1739 = 4{,}216 \qquad s = \sqrt{s^2} = 2{,}05$$

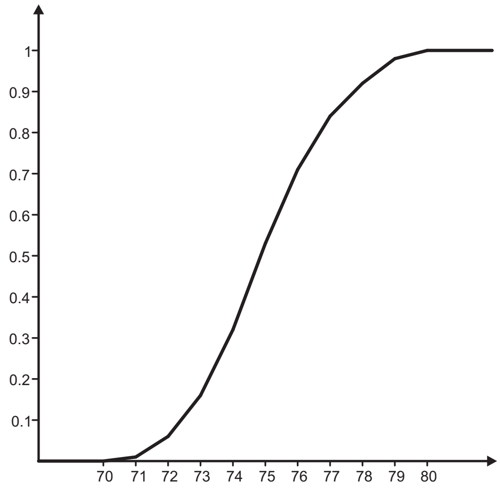
15.2

i	I_i	$\tilde{n}_i$	$\tilde{h}_i$	$\tilde{f}_i$	$\widetilde{G}_i$	$\widetilde{F}_i$
1	]70;71]	1	0,01	0,01	1	0,01
2	]71;72]	5	0,05	0,05	6	0,06
3	]72;73]	10	0,10	0,10	16	0,16
4	]73;74]	16	0,16	0,16	32	0,32
5	]74;75]	21	0,21	0,21	53	0,53
6	]75;76]	18	0,18	0,18	71	0,71
7	]76;77]	13	0,13	0,13	84	0,84
8	]77;78]	8	0,08	0,08	92	0,92
9	]78;79]	6	0,06	0,06	98	0,98
10	]79;80]	2	0,02	0,02	100	1,00

a)



b)



15.3

$$f(c) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2$$

$$f'(c) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - c)^2\right)'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2(x_i - c)(-1)\right] = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - c) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - c) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} x_i - nc = 0$$

$$nc = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$f''(c) = \left(-2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)\right)' = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)' = -2 \sum_{i=1}^{n} (-1) = 2n > 0$$

$f(c)$ hat Minimum bei $c = \bar{x}$

15.4

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1 a_1 + n_2 a_2)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[n_1 (a_1 - \bar{x})^2 + n_2 (a_2 - \bar{x})^2\right]$$

$$n = n_1 + n_2$$

3 Gleichungen mit
3 Unbekannten n_1, n_2, n

$$n\bar{x} = n_1 a_1 + n_2 a_2 \qquad (n_1 + n_2)\bar{x} = n_1 a_1 + n_2 a_2$$

$$(n-1) s^2 = n_1 (a_1 - \bar{x})^2 + n_2 (a_2 - \bar{x})^2 \qquad (n_1 + n_2 - 1) s^2 = n_1 (a_1 - \bar{x})^2 + n_2 (a_2 - \bar{x})^2$$

$$(a_1 - \bar{x}) n_1 + (a_2 - \bar{x}) n_2 = 0$$

$$\left[(a_1 - \bar{x})^2 - s^2\right] n_1 + \left[(a_2 - \bar{x})^2 - s^2\right] n_2 = -s^2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \bar{x} & a_2 - \bar{x} \\ (a_1 - \bar{x})^2 - s^2 & (a_2 - \bar{x})^2 - s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s^2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem

15.5
a) keine empirische Verteilungsfunktion, da es Funktionswerte gibt, die größer als 1 sind

b) keine empirische Verteilungsfunktion, da nicht monoton steigend

c) keine empirische Verteilungsfunktion, da es keine Sprungstellen gibt

d) kann empirische Verteilungsfunktion sein

e) keine empirische Verteilungsfunktion, da die Funktionswerte nicht bei null beginnen

15.6 Median $\tilde{x}$ in der Mitte zwischen 5 und 6 $\Rightarrow \hat{F}(5) = 0,5$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = 0,5 \Rightarrow h_3 = 0,2 \Rightarrow h_6 = 0,1$$

$$\bar{x} = 0,1 \cdot 3 + 0,2 \cdot 4 + 0,2 \cdot 5 + 0,25 \cdot 6 + 0,15 \cdot 7 + 0,1 \cdot 8 = 5,45$$

15.7

$$\bar{x}' = \frac{1}{m}(x_1 + \dots + x_m) \qquad x_1 + \dots + x_m = m\bar{x}'$$

$$s'^2 = \frac{1}{m-1}\left(x_1^2 + \dots + x_m^2 - m\bar{x}'^2\right) \qquad x_1^2 + \dots + x_m^2 = (m-1)s'^2 + m\bar{x}'^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_m + x_{m+1} + \dots + x_n) = \frac{1}{n}(m\bar{x}' + x_{m+1} + \dots + x_n)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left((m-1)s'^2 + m\bar{x}'^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 - n\bar{x}^2\right)$$

15.8 a) Bei $x = 8$ Sprung von 0,4 (<0,5) auf 0,8 (>0,5) $\Rightarrow \tilde{x} = 8$

b) Größte Sprunghöhe bei $x = 8 \Rightarrow$ größte relative Häufigkeit (Sprunghöhe) für $x = 8 \Rightarrow x_{\text{mod}} = 8$

c) $\bar{x} = 0,1 \cdot 2 + 0,1 \cdot 5 + 0,2 \cdot 7 + 0,4 \cdot 8 + 0,1 \cdot 10 + 0,1 \cdot 12 = 7,5$

d) $\bar{x}_g = 2^{0,1} \cdot 5^{0,1} \cdot 7^{0,2} \cdot 8^{0,4} \cdot 10^{0,1} \cdot 12^{0,1} = 6,89$

e) $\bar{x}_h = \dfrac{1}{\frac{0,1}{2} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,2}{7} + \frac{0,4}{8} + \frac{0,1}{10} + \frac{0,1}{12}} = 5,99$

f) $\tilde{s}^2 = 0,1(2-7,5)^2 + 0,1(5-7,5)^2 + 0,2(7-7,5)^2$

$+ 0,4(8-7,5)^2 + 0,1(10-7,5)^2 + 0,1(12-7,5)^2 = 6,45 \qquad \tilde{s} = 2,54$

g) $b = 0,1(2-7,5)^3 + 0,1(5-7,5)^3 + 0,2(7-7,5)^3$

$+ 0,4(8-7,5)^3 + 0,1(10-7,5)^3 + 0,1(12-7,5)^3 = -7,5$

$g = \dfrac{b}{\tilde{s}^3} = -0,46$

h) Kleineste relative Häufigkeit ist 0,1. Alle relative Häufigkeiten sind Vielfache von 0,1. Annahme: kleinste relative Häufigkeit entspricht der absoluten Häufigkeit 1.

$h_1 = 0,1 = \dfrac{n_1}{n} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow n = \dfrac{1}{0,1} = 10$

15.9 a) kein Sprung bei $x = 4 \Rightarrow A(X=4) = 0$

b) $A(X<5) = A(X=2) = 0,1$

$A(X<5) = \hat{F}(5) - \hat{f}(5) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

c) kein Sprung im Intervall $]2;5[\Rightarrow A(2<X<5)=0$

$A(2<X<5) = \hat{F}(5) - \hat{F}(2) - \hat{f}(5) = 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}1 = 0$

d) $A(X>4) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}9$

$= 1 - A(X \le 4) = 1 - \hat{F}(4) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

e) $A(X>\bar{x}) = A(X>7{,}5) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

$= 1 - A(X \le 7{,}5) = 1 - \hat{F}(7{,}5) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

f) $A(4 \le X < 8) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$

$= \hat{F}(8) - \hat{F}(4) + \hat{f}(4) - \hat{f}(8) = 0{,}8 - 0{,}1 + 0 - 0{,}4 = 0{,}3$

g) $A(X \le \tilde{x}) = A(X \le 8) = \hat{F}(8) = 0{,}8$

h) $A(\tilde{x} \le X \le x_{mod}) = A(8 \le X \le 8) = A(X=8) = \hat{f}(8) = 0{,}4$

15.10 der Größe nach geordnete Zahlen: 50 70 85 95 100 3500

Unempfindlich gegenüber Ausreisser 3500 : Median

$\tilde{x} = \frac{1}{2}(85+95) = 90$ $\quad\quad$ $\bar{x} = \frac{1}{6}(50+70+85+95+100+3500) = 650$

Empfehlung: Median

15.11 $n=20 \quad \tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_{10}+x_{11}) = \frac{1}{2}(464+674) = 569$

15.12 Durch Ergänzung der fehlenden Werte erhält man folgende Tabelle mit den relativen Häufigkeiten h_{ij} :

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	0,1	0,05	0,1	0,05	0,3
a_2	0,15	0,15	0,05	0,05	0,4
a_3	0,05	0,1	0,05	0,1	0,3
	0,3	0,3	0,2	0,2	

Bei gleichen relativen Randhäufigkeiten und angenommener Unabhängigkeit hätte man folgende Tabelle mit den relativen Häufigkeiten $\tilde{h}_{ij}$:

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	0,09	0,09	0,06	0,06	0,3
a_2	0,12	0,12	0,08	0,08	0,4
a_3	0,09	0,09	0,06	0,06	0,3
	0,3	0,3	0,2	0,2	

$$\chi^2 = n \sum_{i,j} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} = n \phi^2 \qquad \phi^2 = \sum_{i,j} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

$$\phi^2 = \frac{(0{,}1 - 0{,}09)^2}{0{,}09} + \ldots + \frac{(0{,}1 - 0{,}06)^2}{0{,}06} = 0{,}132$$

$$k = 3 \quad m = 4 \quad l = \min\{k; m\} = \min\{3; 4\} = 3$$

$$K = \sqrt{\frac{l}{l-1}} \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} = \sqrt{\frac{l}{l-1}} \sqrt{\frac{n\phi^2}{n+n\phi^2}} = \sqrt{\frac{l}{l-1}} \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}} = 0{,}418$$

15.13

$$h_{1\underline{3}} = \frac{n_{13}}{n_{\bullet 3}} = \frac{h_{13}}{h_{\bullet 3}} = 0{,}25 \qquad h_{13} = 0{,}25 \cdot h_{\bullet 3} = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1$$

$$h_{\underline{1}3} = \frac{n_{13}}{n_{1\bullet}} = \frac{h_{13}}{h_{1\bullet}} = 0{,}25 \qquad h_{1\bullet} = \frac{h_{13}}{0{,}25} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$$

Damit hat man folgende Tabelle

	b_1	b_2	b_3	
a_1	0,2		0,1	0,4
a_2		0,2		
			0,4	

Durch Ergänzung der fehlenden Werte erhält man folgende Tabelle mit den relativen Häufigkeiten h_{ij} :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	0,2	0,1	0,1	0,4
a_2	0,1	0,2	0,3	0,6
	0,3	0,3	0,4	

Bei gleichen relativen Randhäufigkeiten und angenommener Unabhängigkeit hätte man folgende Tabelle mit den relativen Häufigkeiten $\tilde{h}_{ij}$:

	b_1	b_2	b_3	
a_1	0,12	0,12	0,16	0,4
a_2	0,18	0,18	0,24	0,6
	0,3	0,3	0,4	

$$\phi^2 = \frac{(0{,}2 - 0{,}12)^2}{0{,}12} + \ldots + \frac{(0{,}3 - 0{,}24)^2}{0{,}24} = 0{,}132$$

$$k = 2 \quad m = 3 \quad l = \min\{k; m\} = \min\{2; 3\} = 2$$

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(l-1)}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{l-1}} = 0{,}363$$

15.14 Man hat folgende Tabelle mit den Häufigkeiten n_{ij} :

	A	B	C	
F	20	25	15	60
M	30	5	5	40
	50	30	20	

Bei gleichen Randhäufigkeiten und angenommener Unabhängigkeit hätte man folgende Tabelle mit den Häufigkeiten $\tilde{n}_{ij}$:

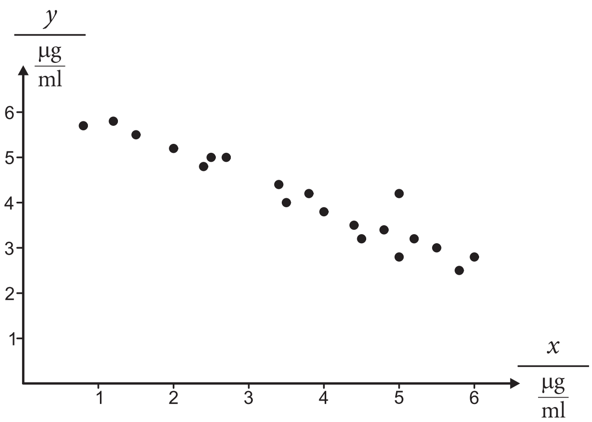
	A	B	C	
F	30	18	12	60
M	20	12	8	40
	50	30	20	

$$\chi^2 = \frac{(20-30)^2}{30} + \ldots + \frac{(5-8)^2}{8} = 17{,}014$$

$$k=2 \quad m=3 \quad l = \min\{k;m\} = \min\{2;3\} = 2$$

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(l-1)}} = 0{,}4125$$

15.15 a)



$$\bar{x} = \frac{1}{20}(0{,}8 + 2{,}7 + 1{,}2 + \ldots + 6{,}0) = 3{,}7$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}(5{,}7 + 5{,}0 + 5{,}8 + \ldots + 2{,}8) = 4{,}1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0{,}8^2 + 2{,}7^2 + 1{,}2^2 + \ldots + 6{,}0^2 = 321{,}46$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 5{,}7^2 + 5{,}0^2 + 5{,}8^2 + \ldots + 2{,}8^2 = 356{,}76$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0{,}8 \cdot 5{,}7 + 2{,}7 \cdot 5{,}0 + 1{,}2 \cdot 5{,}8 + \ldots + 6{,}0 \cdot 2{,}8 = 273{,}37$$

b) $$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{20}\, 273{,}37 - 3{,}7 \cdot 4{,}1 = -1{,}50$$

c) $$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{273{,}37 - 20 \cdot 3{,}7 \cdot 4{,}1}{\sqrt{(321{,}46 - 20 \cdot 3{,}7^2)(356{,}76 - 20 \cdot 4{,}1^2)}} = -0{,}959$$

d) empirisch starker tendenzieller linearer Zusammenhang

e) $$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{273{,}37 - 20 \cdot 3{,}7 \cdot 4{,}1}{321{,}46 - 20 \cdot 3{,}7^2} = -0{,}63$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 6{,}431$$

f) Abnahme um 0,63 Einheiten

g) 6,43 μg/ml

h) $\frac{\mu g}{ml} = 10^{-3} \frac{mg}{ml} \Rightarrow 10^{-6}$ -facher Wert

i) keine Änderung